Introduction to Computer Science

Numeral systems

Piotr Fulmański

Faculty of Mathematics and Computer Science,
University of Łódź, Poland

October 21, 2010

Table of Contents

Number

A number is an abstract idea used in counting and measuring. A symbol or a word in natural language which represents a number is called a numeral. Numerals differ from numbers just as words differ from the things they refer to. The symbols „11", „eleven" and „XI" are different numerals, all representing the same number.
In common usage the word number is used for both the idea and the symbol. In addition to their use in counting and measuring, numerals are often used for labels (telephone numbers), for ordering (serial numbers), and for codes (ISBNs).

Numeral system

A numeral system (or system of numeration) is a framework where a set of numbers are represented by numerals in a consistent manner. It can be seen as the context that allows the numeral „11" to be interpreted as the binary numeral for three, the decimal numeral for eleven, or other numbers in other system.

Unary numeral system

The simplest numeral system is the unary numeral system, in which every natural number is represented by a corresponding number of symbols. If the symbol / is chosen, for example, then the number seven would be represented by ///////. Tally marks represent one such system still in common use.

This type of system, when the number is a sum of symbols, we can also called additive numeral system.

Abbreviated unary numeral system

Abbreviated unary numeral system

The unary notation can be abbreviated by introducing different symbols for certain new values. Very commonly, these values are powers of 10; so for instance, if / stands for one, - for ten and + for 100, then the number 304 can be compactly represented as +++ //// and number 123 as + - - /// without any need for zero. This is called sign-value notation. The ancient Egyptian system is of this type, and the Roman system is a modification of this idea.

More useful still are systems which employ special abbreviations for repetitions of symbols; for example, using the first nine letters of our alphabet for these abbreviations, with A standing for „one occurrence", B „two occurrences", and so on, we could then write C+ D/ for the number 304. The numeral system of English is of this type ("three hundred [and] four"), as are those of virtually all other spoken languages, regardless of what written systems they have adopted.

Rzymski system liczbowy

Symbol	Wartość	
I	1	(*unus*)
V	5	(*quinque*)
X	10	(*decem*)
L	50	(*quinquaginta*)
C	100	(*centum*)
D	500	(*quingenti*)
M	1000	(*mille*)

Rzymski system liczbowy

Dodatkowe symbole

- Kreska pionowa – liczba umieszczona między kreskami była mnożona przez 100

$$|MD| = (1000 + 500) * 100 = 150000$$

- Nadkreślenie – liczba nad którą występowała kreska była mnożona przez 1000

$$\overline{MD} = (1000 + 500) * 1000 = 1500000$$

Dodatkowe założenia

- Każdorazowe wystąpienie symbolu o mniejszej wartości przed symbolem o większej wartości oznacza odejmowanie (od większego mniejsze).
- Jako poprawne uważa się zapisy bardziej zwarte, np. IV zamiast IIII.

Rzymski system liczbowy

Dodatkowe symbole

- Kreska pionowa – liczba umieszczona między kreskami była mnożona przez 100

$$|MD| = (1000 + 500) * 100 = 150000$$

- Nadkreślenie – liczba nad którą występowała kreska była mnożona przez 1000

$$\overline{MD} = (1000 + 500) * 1000 = 1500000$$

Dodatkowe założenia

- Każdorazowe wystąpienie symbolu o mniejszej wartości przed symbolem o większej wartości oznacza odejmowanie (od większego mniejsze).
- Jako poprawne uważa się zapisy bardziej zwarte, np. IV zamiast IIII.

Nowadays system

Nowadays, the most commonly used system of numerals is known as Hindu-Arabic numerals, and two great Indian mathematicians could be given credit for developing them. Aryabhatta of Kusumapura who lived during the 5th century developed the **place value notation** and Brahmagupta a century later introduced the **symbol zero**.

Meaning of nowadays numbers

```
111=?!     III=?!
|||        |||
||1        ||1
||         ||
|10        |1
|          |
100        1
```

Znaczenie dzisiejszych liczb

Obserwacja 1

We współczesnych systemach liczbowych pozycja cyfry w liczbie ma istotne znaczenie.

Meaning of nowadays numbers

```
115=?!       IIV
|||          |||
||5          ||5
||           ||
|10          |-1
|            |
100          1
```

Znaczenie dzisiejszych liczb

Obserwacja 2

We współczesnych systemach liczbowych znaczenie cyfry nie zależy od kontekstu (innych symboli otaczających).

Meaning of nowadays numbers

We use three times the same symbol: „1” but in each case it has different meaning. What is important, the mining does not depend on other sorrounding symbols (does not depend on context) but depend only on position of symbol in our number.

Znaczenie dzisiejszych liczb

$304 = ?!$

$304 = 300 + 0 + 4 = 10^2 \cdot 3 + 10^1 \cdot 0 + 10^0 \cdot 4$

Meaning of nowadays numbers

We use three times the same symbol: „1" but in each case it has different meaning. What is important, the mining does not depend on other sorrounding symbols (does not depend on context) but depend only on position of symbol in our number.

Znaczenie dzisiejszych liczb

$304 = ?!$

$304 = 300 + 0 + 4 = 10^2 \cdot 3 + 10^1 \cdot 0 + 10^0 \cdot 4$

Meaning of nowadays numbers

Meaning of nowadays numbers

We use three times the same symbol: „1'' but in each case it has different meaning. What is important, the mining does not depend on other sorrounding symbols (does not depend on context) but depend only on position of symbol in our number.

Znaczenie dzisiejszych liczb

$304 = ?!$

$304 = 300 + 0 + 4 = 10^2 \cdot 3 + 10^1 \cdot 0 + 10^0 \cdot 4$

Positional system

More elegant is a positional system, also known as place-value notation. Again working in base 10, we use ten different digits 0, ..., 9 and use the position of a digit to signify the power of ten that the digit is to be multiplied with, as in $304 = 3 \times 100 + 0 \times 10 + 4 \times 1$. Note that zero, which is not needed in the other systems, is of crucial importance here, in order to be able to „skip" a power. The Hindu-Arabic numeral system, borrowed from India, is a positional base 10 system; it is used today throughout the world.

Some observations

Arithmetic is much easier in positional systems than in the earlier additive ones; furthermore, additive systems have a need for a potentially infinite number of different symbols for the different powers of 10; positional systems need only 10 different symbols (assuming that it uses base 10).

Definition

A **positional numeral system** or *place-value numeral system*) we called pair (b, D), where b is a natural number called the **base or radix of the numeral system** and D is a finite set of b symbols $\{s_0, s_1, \ldots, s_{b-1}\}$ called **digits** or **numerals**[a]. System taki nazywamy **systemem liczbowym o podstawie** b (ang. *base-b system*).
Jeśli $b = 10$ to taki system będziemy nazywać także **dziesiętnym**, jeśli $b = 2$ – **dwójkowym**, jeśli $b = 8$ – **ósemkowym**, itd.

[a] Zazwyczaj zbiór D składa się z odpowiedniej liczby początkowych symboli tworzących ciąg $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i jeśli zajdzie taka potrzeba to kolejnych liter alfabetu łacińskiego: $A, B, \ldots,$ przyjumjąc zasadę, że A oznacza *dziesięć*, B – *jedynaście*, itd.

Znaczenie

In such a system each number is represented as a sequence of digits and its value depends both on digits and position of digit it that sequence. Value v of sequence

$$d_k d_{k-1} \ldots d_1 d_0$$

obliczamy według poniższej formuły

$$v = d_k b^k + d_{k-1} b^{k-1} + \ldots + d_1 b^1 + d_0 b^0 \tag{1}$$

gdzie $d_0, \ldots, d_k \in D$.

Remark

Using at one time several different positional systems, we have to write numbers with an information about base. Consider followin examples:

- 11_{10} - number of decimal value 11 written in the base-10 (decimal) system,
- 11_{2} - number of decimal value 3 written in the base-2 (binary) system,
- 11_{5} - number of decimal value 6 written in the base-5 system,
- 11_{25} - number of decimal value 26 written in the base-25 system.

Remark

Using at one time several different positional systems, we have to write numbers with an information about base. Consider followin examples:

- 11_{10} - number of decimal value 11 written in the base-10 (decimal) system,
- 11_{2} - number of decimal value 3 written in the base-2 (binary) system,
- 11_{5} - number of decimal value 6 written in the base-5 system,
- 11_{25} - number of decimal value 26 written in the base-25 system.

Remark

Using at one time several different positional systems, we have to write numbers with an information about base. Consider followin examples:

- 11_{10} - number of decimal value 11 written in the base-10 (decimal) system,
- 11_2 - number of decimal value 3 written in the base-2 (binary) system,
- 11_5 - number of decimal value 6 written in the base-5 system,
- 11_{25} - number of decimal value 26 written in the base-25 system.

Remark

Using at one time several different positional systems, we have to write numbers with an information about base. Consider followin examples:

- 11_{10} - number of decimal value 11 written in the base-10 (decimal) system,
- 11_{2} - number of decimal value 3 written in the base-2 (binary) system,
- 11_{5} - number of decimal value 6 written in the base-5 system,
- 11_{25} - number of decimal value 26 written in the base-25 system.

Remark

Using at one time several different positional systems, we have to write numbers with an information about base. Consider followin examples:

- 11_{10} - number of decimal value 11 written in the base-10 (decimal) system,
- 11_2 - number of decimal value 3 written in the base-2 (binary) system,
- 11_5 - number of decimal value 6 written in the base-5 system,
- 11_{25} - number of decimal value 26 written in the base-25 system.

Conversion from base-2 (binary) into base-10 (decimal) system

Examples :)

Conversion from base-10 into base-2 system

Examples :)

Arithmetic in base-2 system

Examples :)

Conversion from base-2 (binary) into base-10 (decimal) system

Examples :)

Conversion from base-10 into base-2 system

Examples :)

Arithmetic in base-2 system

Examples :)

Conversion from base-2 (binary) into base-10 (decimal) system

Examples :)

Conversion from base-10 into base-2 system

Examples :)

Arithmetic in base-2 system

Examples :)

```
10010:11=110
1111001:1011=1011
```

Assumption

Saying *real number* we mean signless real number or a number with integer and fractional part without sign[a].

[a] Podobnie jak dla liczb całkowitych, nie należy postrzegać prezentowanego zapisu liczby rzeczywistej jako tego, który jest stosowany w komputerze w sposób bezpośredni.

Real numbers in base-2 (binary) system

Real numbers in base-10 (decimal) system

Dziesiętna reprezentacja liczby rzeczywistej r jest wyrażeniem postaci

$$r = I, d_{-1} d_{-2} d_{-3} \dots$$

gdzie I stanowi **część całkowitą** liczby r wyrażoną w postaci dziesiętnej, natomiast d_{-1}, d_{-2}, d_{-3},... są cyframi tworzącymi **część ułamkową** liczby r. Obie części rozdziela separator, tj. znak przecinka (**,**). Wartość v takiego wyrażenia obliczamy według wzoru

$$v = v_I + d_{-1} 10^{-1} + d_{-2} 10^{-2} + d_{-3} 10^{-3} + \dots,$$

gdzie v_I jest wartością części całkowitej I.

Liczby rzeczywiste w systemie binarnym

Liczby rzeczywiste w systemie dziesiętnym

Ponieważ I wyrazić możemy jako

$$I = \cdots + d_3 10^3 + d_2 10^2 + d_1 10^1 + d_0 10^0$$

więc ostatecznie otrzymujemy

$$\begin{aligned} v &= \cdots + d_3 10^3 + d_2 10^2 + d_1 10^1 + d_0 10^0 \\ &\quad + d_{-1} 10^{-1} + d_{-2} 10^{-2} + d_{-3} 10^{-3} + \ldots \end{aligned}$$

co w zwięzłej postaci zapisujemy jako

$$v = \sum_{i=-\infty}^{\infty} d_i \cdot 10^i$$

Obserwacja 3

Zapis część ułamkowej jest podobny do zapisu części całkowitej, ale używamy ujemnych wykładników zamiast dodatnich.

Liczby rzeczywiste w systemie binarnym

Jeżeli teraz nasze rozważania przeniesiemy do systemu dwójkowego, to wartość części ułamkowej będzie wyliczana na podobnej zasadzie (zmieni się jedynie podstawa), zatem:

$$v = d_{-1}2^{-1} + d_{-2}2^{-2} + \cdots + d_{-n}2^{-n}$$

a wartość całej liczby to

$$v = \sum_{i=-\infty}^{\infty} d_i \cdot 2^i$$

Oczywiście w tym wypadku cyfry są elementami zbioru $\{0, 1\}$.

Liczby rzeczywiste w systemie binarnym

Obserwacja 4

Binarne liczby rzeczywiste tworzy się i interpretuje analogicznie do dziesiętnych liczb rzeczywistych, ale zamiast podstawy 10 używa się jako podstawy liczby 2.

Liczby rzeczywiste w systemie binarnym

Konwersja części ułamkowej z systemu binarnego do systemu dziesiętnego

Przykłady :)

Konwersja części ułamkowej z systemu dziesiętnego do systemu dwójkowego

Przykłady :)

Liczby rzeczywiste w systemie binarnym

Konwersja części ułamkowej z systemu binarnego do systemu dziesiętnego

Przykłady :)

Konwersja części ułamkowej z systemu dziesiętnego do systemu dwójkowego

Przykłady :)

Liczby całkowite w systemie o podstawie n

Przykłady

Przykłady dla $n = 3, 7, 13, 25$

Przykłady

Przykłady dla $n = 4, 8, 16$

Liczby całkowite w systemie o podstawie n

Przykłady

Przykłady dla $n = 3, 7, 13, 25$

Przykłady

Przykłady dla $n = 4, 8, 16$