

Wstęp do informatyki

Systemy liczbowe

Piotr Fulmański

Wydział Matematyki i Informatyki,
Uniwersytet Łódzki, Polska

October 10, 2013

1 Liczby i ich systemy

2 Rodzaje systemów liczbowych

Liczba

Liczba jest pewnym abstrakcyjnym bytem wykorzystywanym do zliczania i mierzenia. Symbol lub słowo języka naturalnego wyrażające liczbę nazywamy numeralem lub cyfrą^a (ang. *numeral, digit*). Cyfry różnią się od liczb tak jak słowa różnią się od rzeczy, które określają. Symbole „11”, „jedynaście” oraz „XI” są różnymi numeralami reprezentującymi tą samą liczbę.

W potocznym znaczeniu słowo *liczba* używane jest zarówno w pierwotnym znaczeniu abstrakcyjnego bytu wyrażającego ilość i wielkość jak i symbolu. Oto bowiem wyrażenia numeryczne (a więc złożone z cyfr) używane są jako pewnego rodzaju nazwy (np. numer telefonu), w celu uporządkowania (np. numer seryjny) czy też jako kod (np. ISBN).

^aChoć termin *cyfra* zasadniczo zarezerwowany jest dla pojedynczego symbolu to jednak np. język angielski zdaje się nie rozróżniać tych dwóch terminów.

System liczbowy

System liczbowy jest sposobem reprezentacji liczb przy użyciu cyfr (numerałów) w jednolity sposób. W zależności od kontekstu numerał „11” interpretować będziemy jako dwójkowe przedstawienie liczby trzy, dziesiętne przedstawienie liczby jedynaście lub być może jeszcze inną liczbę zapisaną w innym systemie.

Rodzaje systemów liczbowych

Unarny system liczbowy

Najprostszym systemem liczbowym jest **unarny system liczbowy**, w którym każda liczba naturalna reprezentowana jest przy pomocy jednego znaku powielonego tyle razy ile wynosi liczba reprezentowana przez tworzony numerał. Jeśli wybranym symbolem będzie „|”, wówczas liczbę siedem zapiszemy jako siedmiokrotne powtórzenie tego znaku, czyli ||||| |. Wbrew pozorom system ten wciąż funkcjonuje u ludów pierwotnych a i cywilizacje bardziej rozwinięte wykorzystują go do zapisu niewielkich liczb.

Systemy tego typu nazywamy także **systemami addytywnymi**, bowiem wartość liczby otrzymujemy poprzez dodawanie kolejnych wartości wyrażanych przez symbole (w tym przypadku jeden symbol).

Skrócony zapis systemu unarnego

Skrócony zapis systemu unarnego

Dosyć „rozwlekły” system unarny można uczynić bardziej zwięzłym stosując różne dodatkowe symbole na określenie pewnych wartości. Na przykład jeśli | oznacza „jeden”, - oznacza „dziesięć” = oznacza „sto”, wówczas liczbę 304 zwięzle zapisać możemy w następujący sposób: === |||| a liczbę 123 jako: = - - ||| bez potrzeby używania symbolu i pojęcia „zero”. System liczbowy tego typu nazywać będziemy **systemem addytywnym** jako, że wartość liczby otrzymujemy przez dodanie wartości reprezentowanych przez kolejne znaki. Liczby rzymskie są właśnie liczbami takiego systemu.

Trochę bardziej użytecznymi systemami są systemy używające symboli do określenia ilości powtórzeń symboli określających liczbę. Na przykład możemy używać pierwszych dziewięciu liter alfabetu na określenie ilości powtórzeń, przy czym A oznaczałoby „dwa powtórzenia”, B „trzy powtórzenia” itd. Wówczas liczbę 304 mogli byśmy zapisać jako C = D|. Taki sposób wyrażania liczb obecny jest w większości nowożytnych języków europejskich, np. w angielskim: „three hundred [and] four” czy polskim „trzy-sta [i] cztery”.

Rzymski system liczbowy

Rzymski system liczbowy

Symbol	Wartość
I	1 (<i>unus</i>)
V	5 (<i>quinque</i>)
X	10 (<i>decem</i>)
L	50 (<i>quingenta</i>)
C	100 (<i>centum</i>)
D	500 (<i>quingenti</i>)
M	1000 (<i>mille</i>)

Dodatkowe symbole

- Kreska pionowa – liczba umieszczona między kreskami była mnożona przez 100

$$|MD| = (1000 + 500) \cdot 100 = 150000$$

- Nadkreślenie – liczba nad którą występowała kreska była mnożona przez 1000

$$\overline{MD} = (1000 + 500) \cdot 1000 = 1500000$$

Dodatkowe założenia

- Każdorazowe wystąpienie symbolu o mniejszej wartości przed symbolem o większej wartości oznacza odejmowanie (od większego mniejsze).
- Jako poprawne uważa się zapisy bardziej zwarte, np. IV zamiast IIII.

Dodatkowe symbole

- Kreska pionowa – liczba umieszczona między kreskami była mnożona przez 100

$$|MD| = (1000 + 500) \cdot 100 = 150000$$

- Nadkreślenie – liczba nad którą występowała kreska była mnożona przez 1000

$$\overline{MD} = (1000 + 500) \cdot 1000 = 1500000$$

Dodatkowe założenia

- Każdorazowe wystąpienie symbolu o mniejszej wartości przed symbolem o większej wartości oznacza odejmowanie (od większego mniejsze).
- Jako poprawne uważa się zapisy bardziej zwarte, np. IV zamiast IIII.

Nowadays system

Nowadays, the most commonly used system of numerals is known as Hindu-Arabic numerals, and two great Indian mathematicians could be given credit for developing them. Aryabhata of Kusumapura who lived during the 5th century developed the **place value notation** and Brahmagupta a century later introduced the **symbol zero**.

Znaczenie dzisiejszych liczb

111=?!

|||

||1

||

|10

|

100

III=?!

|||

||1

||

|1

|

1

Znaczenie dzisiejszych liczb

Obserwacja 1

We współczesnych systemach liczbowych pozycja cyfry w liczbie ma istotne znaczenie.

Znaczenie dzisiejszych liczb

115=?!	IIV
5	5
10	-1
100	1

Znaczenie dzisiejszych liczb

Obserwacja 2

We współczesnych systemach liczbowych znaczenie cyfry nie zależy od kontekstu (innych symboli otaczających).

Znaczenie dzisiejszych liczb

Znaczenie dzisiejszych liczb

W poprzednich przykładach trzykrotnie użyto symbolu „1” ale za każdym razem miał on inne znaczenie. Co ważniejsze, znaczenie to nie zależało od innych otaczających symboli, ale tylko i wyłącznie od pozycji symbolu w liczbie.

Znaczenie dzisiejszych liczb

$304 = ?!$

$$304 = 300 + 0 + 4 = 10^2 \cdot 3 + 10^1 \cdot 0 + 10^0 \cdot 4$$

Znaczenie dzisiejszych liczb

Znaczenie dzisiejszych liczb

W poprzednich przykładach trzykrotnie użyto symbolu „1” ale za każdym razem miał on inne znaczenie. Co ważniejsze, znaczenie to nie zależało od innych otaczających symboli, ale tylko i wyłącznie od pozycji symbolu w liczbie.

Znaczenie dzisiejszych liczb

$304 = ?!$

$$304 = 300 + 0 + 4 = 10^2 \cdot 3 + 10^1 \cdot 0 + 10^0 \cdot 4$$

Znaczenie dzisiejszych liczb

Znaczenie dzisiejszych liczb

W poprzednich przykładach trzykrotnie użyto symbolu „1” ale za każdym razem miał on inne znaczenie. Co ważniejsze, znaczenie to nie zależało od innych otaczających symboli, ale tylko i wyłącznie od pozycji symbolu w liczbie.

Znaczenie dzisiejszych liczb

$304 = ?!$

$$304 = 300 + 0 + 4 = 10^2 \cdot 3 + 10^1 \cdot 0 + 10^0 \cdot 4$$

Systemy pozycyjne

System pozycyjny jest znacznie bardziej elegancki niż system unarny lub systemy pochodne od unarnego. Używając np. liczby 10 jako podstawy systemu, używamy 10 symboli 0, ..., 9 nazywanych cyframi i wykorzystujemy pozycję cyfry w liczbie do określenia wykładnika dla podstawy, np. $304 = 3 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 4 \cdot 1$. Zauważmy, iż w tej notacji musimy użyć symbolu zero, który nie był potrzebny wcześniej, a tutaj daje nam możliwość „pominięcia” pewnej potęgi.

Pewne obserwacje

Arytmetyka jest znacznie łatwiejsza w systemach pozycyjnych niż addytywnych. Co więcej, addytywne systemy teoretycznie mogą potrzebować nieskończonej ilości symboli do wyrażenia co raz to większych liczb (co raz to większych potęg liczby 10). Wykorzystując natomiast pozycyjny system liczbowy, przy pomocy skończonego zbioru cyfr możemy wyrazić każdą liczbę.

Definicja

Pozycyjnym systemem liczbowym (ang. *positional numeral system* lub *place-value numeral system*) nazywamy parę (b, D) , gdzie b jest liczbą naturalną nazywaną podstawą systemu (ang. *base* lub *radix of that numeral system*), D jest skończonym zbiorem b symboli $\{s_0, s_1, \dots, s_{b-1}\}$, nazywanych **cyframi** (ang. *digits*)^a. System taki nazywamy **systemem liczbowym o podstawie b** (ang. *base- b system*). Jeśli $b = 10$ to taki system będziemy nazywać także **dziesiętnym**, jeśli $b = 2$ – **dwójkowym**, jeśli $b = 8$ – **ósemkowym**, itd.

^aZazwyczaj zbiór D składa się z odpowiedniej liczby początkowych symboli tworzących ciąg $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i jeśli zajdzie taka potrzeba to kolejnych liter alfabetu łańciskiego: A, B, \dots , przyjmując zasadę, że A oznacza *dziesiąć*, B – *jedyńście*, itd.

Znaczenie

W takich systemach każda liczba jest jednoznacznie reprezentowana jako ciąg cyfr a jej wartość zależy zarówno od cyfr jak i pozycji na jakich one występują. Wartość v ciągu

$$d_k d_{k-1} \dots d_1 d_0$$

obliczamy według poniższej formuły

$$v = d_k b^k + d_{k-1} b^{k-1} + \dots + d_1 b^1 + d_0 b^0 \quad (1)$$

gdzie $d_0, \dots, d_k \in D$.

Uwaga

Używając jednocześnie kilku różnych pozycyjnych systemów liczbowych, zawsze musimy zaznaczyć w jakim z nich dana liczba jest zapisana.

Przyjrzyjmy się przykładom:

- 11_{10} - liczba o dziesiętnej wartości 11 zapisana z pozycyjnym systemem liczbowym o podstawie 10,
- 11_2 - liczba o dziesiętnej wartości 3 zapisana z pozycyjnym systemem liczbowym o podstawie 2,
- 11_5 - liczba o dziesiętnej wartości 6 zapisana z pozycyjnym systemem liczbowym o podstawie 5,
- 11_{25} - liczba o dziesiętnej wartości 26 zapisana z pozycyjnym systemem liczbowym o podstawie 25.

Uwaga

Używając jednocześnie kilku różnych pozycyjnych systemów liczbowych, zawsze musimy zaznaczyć w jakim z nich dana liczba jest zapisana.

Przyjrzyjmy się przykładom:

- 11_{10} - liczba o dziesiętnej wartości 11 zapisana z pozycyjnym systemem liczbowym o podstawie 10,
- 11_2 - liczba o dziesiętnej wartości 3 zapisana z pozycyjnym systemem liczbowym o podstawie 2,
- 11_5 - liczba o dziesiętnej wartości 6 zapisana z pozycyjnym systemem liczbowym o podstawie 5,
- 11_{25} - liczba o dziesiętnej wartości 26 zapisana z pozycyjnym systemem liczbowym o podstawie 25.

Uwaga

Używając jednocześnie kilku różnych pozycyjnych systemów liczbowych, zawsze musimy zaznaczyć w jakim z nich dana liczba jest zapisana.

Przyjrzyjmy się przykładom:

- 11_{10} - liczba o dziesiętnej wartości 11 zapisana z pozycyjnym systemem liczbowym o podstawie 10,
- 11_2 - liczba o dziesiętnej wartości 3 zapisana z pozycyjnym systemem liczbowym o podstawie 2,
- 11_5 - liczba o dziesiętnej wartości 6 zapisana z pozycyjnym systemem liczbowym o podstawie 5,
- 11_{25} - liczba o dziesiętnej wartości 26 zapisana z pozycyjnym systemem liczbowym o podstawie 25.

Uwaga

Używając jednocześnie kilku różnych pozycyjnych systemów liczbowych, zawsze musimy zaznaczyć w jakim z nich dana liczba jest zapisana.

Przyjrzyjmy się przykładom:

- 11_{10} - liczba o dziesiętnej wartości 11 zapisana z pozycyjnym systemem liczbowym o podstawie 10,
- 11_2 - liczba o dziesiętnej wartości 3 zapisana z pozycyjnym systemem liczbowym o podstawie 2,
- 11_5 - liczba o dziesiętnej wartości 6 zapisana z pozycyjnym systemem liczbowym o podstawie 5,
- 11_{25} - liczba o dziesiętnej wartości 26 zapisana z pozycyjnym systemem liczbowym o podstawie 25.

Uwaga

Używając jednocześnie kilku różnych pozycyjnych systemów liczbowych, zawsze musimy zaznaczyć w jakim z nich dana liczba jest zapisana.

Przyjrzyjmy się przykładom:

- 11_{10} - liczba o dziesiętnej wartości 11 zapisana z pozycyjnym systemem liczbowym o podstawie 10,
- 11_2 - liczba o dziesiętnej wartości 3 zapisana z pozycyjnym systemem liczbowym o podstawie 2,
- 11_5 - liczba o dziesiętnej wartości 6 zapisana z pozycyjnym systemem liczbowym o podstawie 5,
- 11_{25} - liczba o dziesiętnej wartości 26 zapisana z pozycyjnym systemem liczbowym o podstawie 25.

Miejmy na uwadze, iż wszystkie systemy pozycyjne mają pewne wspólne cechy i charakteryzują się podobnym „podejściem” do zagadnienia reprezentacji liczb, bez względu na to jak by oryginalne nie były. Dla przykładu wspomnijmy o silniowym systemie pozycyjnym. Mimo swojej oryginalności jest to nadal system pozycyjny ze wszystkimi tego konsekwencjami.

Silniowy system pozycyjny

Silniowy system pozycyjny (ang. *factorial number system* lub *factoradic*) – pozycyjny system liczbowy w którym mnożniki poszczególnych pozycji nie są definiowane przez potęgę pewnej liczby (podstawy), lecz silnię kolejnych liczb naturalnych (z zerem), a liczba cyfr używanych na n -tej pozycji wynosi $n + 1$

Pozycja	6	5	4	3	2	1	0
Wartość pozycji	$6!$	$5!$	$4!$	$3!$	$2!$	$1!$	$0!$
Dopuszczalne cyfry:	$\{0, \dots, 6\}$	$\{0, \dots, 5\}$	$\{0, \dots, 4\}$	$\{0, \dots, 3\}$	$\{0, 1, 2\}$	$\{0, 1\}$	$\{0\}$

Stąd zapis silniowy np. liczby 4600_{10} wygląda następująco:

$$6212200! = (6 \cdot 6!) + (2 \cdot 5!) + (1 \cdot 4!) + (2 \cdot 3!) + (2 \cdot 2!) + (0 \cdot 1!) + (0 \cdot 0!)$$

Ze względu na to, iż na pozycji zerowej jest zawsze zero, używana jest także odmiana tego systemu bez tej pozycji, co nie wpływa na wartości zapisywanych liczb. Zapis jest jednoznaczny, tzn. każdą liczbę naturalną można zapisać tylko w jeden sposób i każdy zapis oddaje dokładnie jedną wartość.

Konwersja z systemu binarnego na dziesiętny

Przykłady :)

Konwersja z systemu dziesiętnego na binarny

Przykłady :)

Arytmetyka w systemie binarnym

Przykłady :)

Konwersja z systemu binarnego na dziesiętny

Przykłady :)

Konwersja z systemu dziesiętnego na binarny

Przykłady :)

Arytmetyka w systemie binarnym

Przykłady :)

Konwersja z systemu binarnego na dziesiętny

Przykłady :)

Konwersja z systemu dziesiętnego na binarny

Przykłady :)

Arytmetyka w systemie binarnym

Przykłady :)

10010:11=110

1111001:1011=1011

Liczby rzeczywiste w systemie binarnym

Założenie

Mówiąc *liczba rzeczywista* mamy na myśli beznakową liczbę rzeczywistą złożoną z części całkowitej i ułamkowej^a.

^aPodobnie jak dla liczb całkowitych, nie należy postrzegać prezentowanego zapisu liczby rzeczywistej jako tego, który jest stosowany w komputerze w sposób bezpośredni.

Liczby rzeczywiste w systemie binarnym

Liczby rzeczywiste w systemie dziesiętnym

Dziesiętna reprezentacja liczby rzeczywistej r jest wyrażeniem postaci

$$r = l, d_{-1}d_{-2}d_{-3} \dots$$

gdzie l stanowi **część całkowitą** liczby r wyrażoną w postaci dziesiętnej, natomiast $d_{-1}, d_{-2}, d_{-3}, \dots$ są cyframi tworzącymi **część ułamkową** liczby r . Obie części rozdziela separator, tj. znak przecinka (,). Wartość v takiego wyrażenia obliczamy według wzoru

$$v = v_l + d_{-1}10^{-1} + d_{-2}10^{-2} + d_{-3}10^{-3} + \dots,$$

gdzie v_l jest wartością części całkowitej l .

Liczby rzeczywiste w systemie binarnym

Liczby rzeczywiste w systemie dziesiętnym

Ponieważ I wyrazić możemy jako

$$I = \dots + d_3 10^3 + d_2 10^2 + d_1 10^1 + d_0 10^0$$

więc ostatecznie otrzymujemy

$$v = \dots + d_3 10^3 + d_2 10^2 + d_1 10^1 + d_0 10^0 \\ + d_{-1} 10^{-1} + d_{-2} 10^{-2} + d_{-3} 10^{-3} + \dots$$

co w zwartej postaci zapisujemy jako

$$v = \sum_{i=-\infty}^{\infty} d_i \cdot 10^i$$

Liczby rzeczywiste w systemie binarnym

Obserwacja 3

Zapis część ułamkowej jest podobny do zapisu części całkowitej, ale używamy ujemnych wykładników zamiast dodatnich.

Liczby rzeczywiste w systemie binarnym

Liczby rzeczywiste w systemie binarnym

Jeżeli teraz nasze rozważania przeniesiemy do systemu dwójkowego, to wartość części ułamkowej będzie wyliczana na podobnej zasadzie (zmieni się jedynie podstawa), zatem:

$$v = d_{-1}2^{-1} + d_{-2}2^{-2} + \dots + d_{-n}2^{-n}$$

a wartość całej liczby to

$$v = \sum_{i=-\infty}^{\infty} d_i \cdot 2^i$$

Oczywiście w tym wypadku cyfry są elementami zbioru $\{0, 1\}$.

Liczby rzeczywiste w systemie binarnym

Obserwacja 4

Binarne liczby rzeczywiste tworzy się i interpretuje analogicznie do dziesiętnych liczb rzeczywistych, ale zamiast podstawy 10 używa się jako podstawy liczby 2.

Liczby rzeczywiste w systemie binarnym

Konwersja części ułamkowej z systemu binarnego do systemu dziesiętnego

Przykłady :)

Konwersja części ułamkowej z systemu dziesiętnego do systemu dwójkowego

Przykłady :)

Liczby rzeczywiste w systemie binarnym

Konwersja części ułamkowej z systemu binarnego do systemu dziesiętnego

Przykłady :)

Konwersja części ułamkowej z systemu dziesiętnego do systemu dwójkowego

Przykłady :)

Liczby całkowite w systemie o podstawie n

Przykłady

Przykłady dla $n = 3, 7, 13, 25$

Przykłady

Przykłady dla $n = 4, 8, 16$

Liczby całkowite w systemie o podstawie n

Przykłady

Przykłady dla $n = 3, 7, 13, 25$

Przykłady

Przykłady dla $n = 4, 8, 16$